Pendel

Rainer Glaschick, Paderborn
2014-06-22

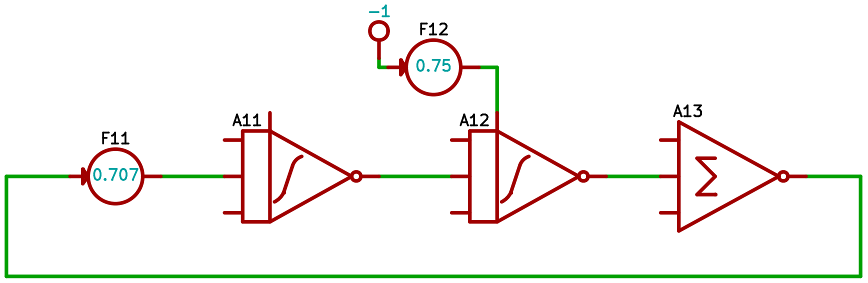
Auf einem Analogrechner soll ein Pendel mit großer Auslenkung simuliert werden.

Theorie

Die Schwingung eines Pendels ist gegeben durch

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin \varphi$$

Für kleine Auslenkungen ist $\sin \varphi \approx \varphi$, somit wird die übliche Lösung (Basisschaltung)für den linearen Oszillator:



Der zweite Integrierer wird mit der anfänglichen Auslenkung des Pendels initialisert, hier 0.75. Da im folgenden mit dem Bogenmaß gerechnet wird, entspricht das 43°; bei 45° ist die Formel ohnehin nicht mehr gültig.

Der Faktor vor dem ersten Integrierer bestimmt die Zeitkonstante; mit dem Wert $\sqrt{2} = 0.707$ sollte die Periodendauer 2sec sein.

Ausführung

Für die Bildung der Funktion $\sin \varphi$ gibt es zwei Möglichkeiten:

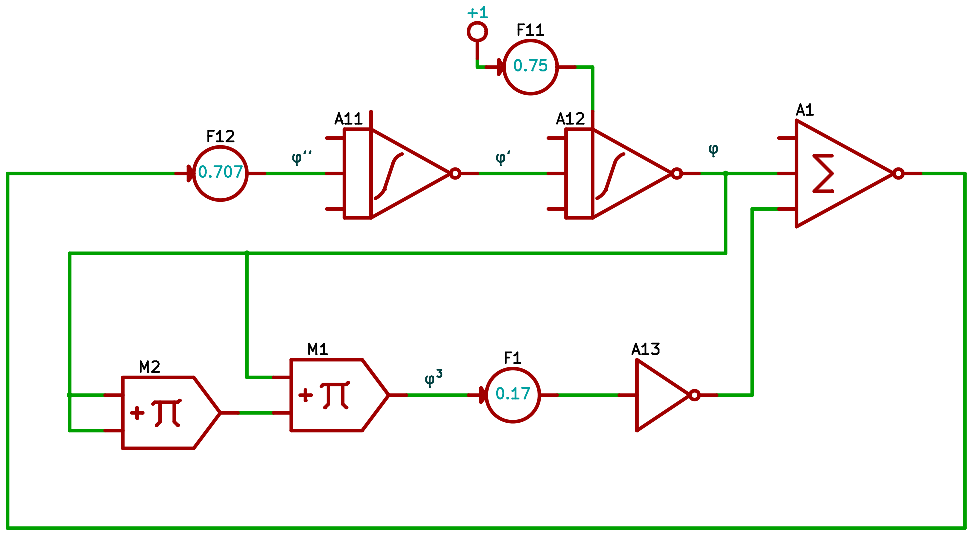
a. Benutzung der Näherung $\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6}$
b. Bestimmung von $\sin \varphi$ aus φ durch Integration

In jedem Fall ist $\sin \varphi$ die Projektion in die horizontale Ebene.

zu a): Näherung

Der Fehler ist maximal $\frac{\varphi^5}{120}$; bei einer Auslenkung von 45° oder $\frac{\pi}{4}$ sind das 0.25%[1].

Zur analytische Bildung von x^3 benötigt man jedoch zwei Multiplizierer, also folgende Rechenschaltung[2]:



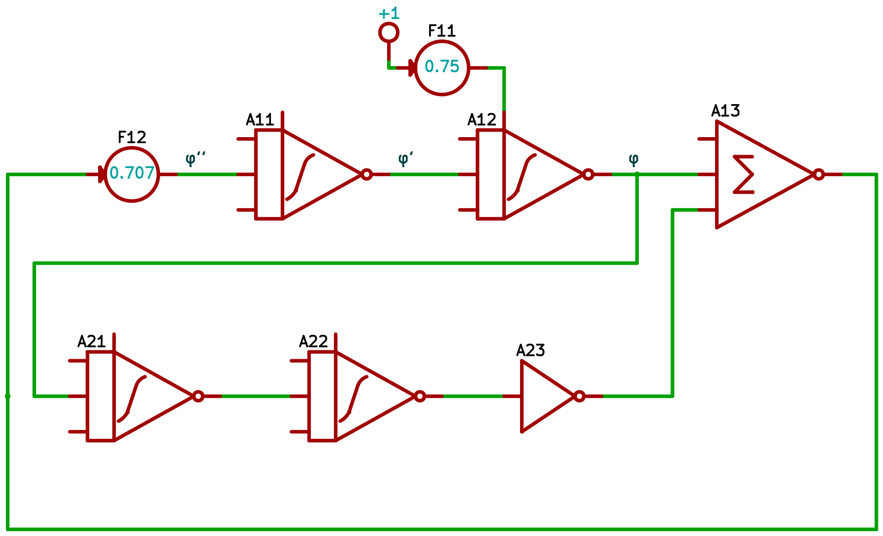
Alternativ kann man $\frac{x^3}{6}$ auch durch zweimalige Integration von x bilden:

$$\int x\,dt = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int x^2\,dt = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int\int x\,d^2t = \frac{1}{6}x^3$$

Das ergibt folgende Rechenschaltung:



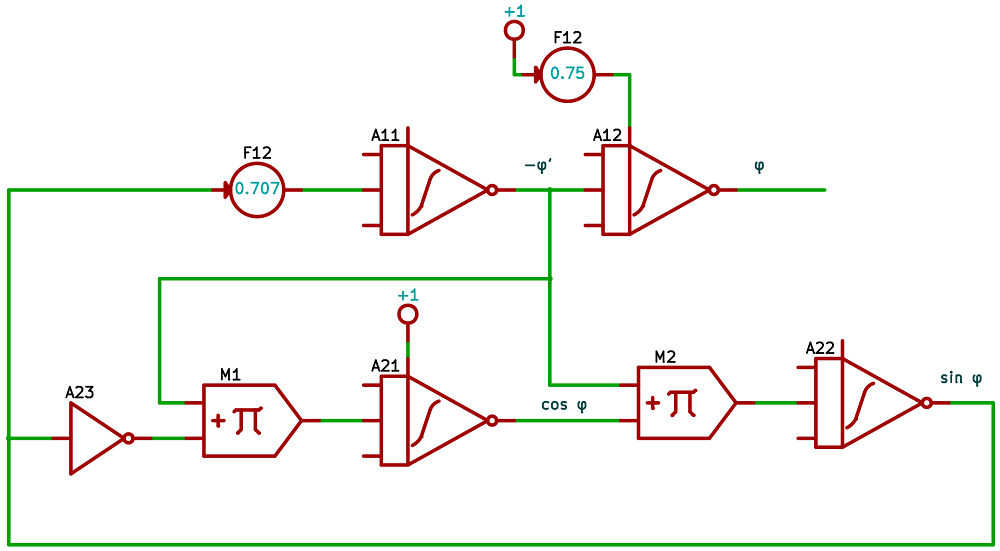
zu b): Integration

Da die Ableitungen von φ ohnehin vorhanden sind, kann $\sin\varphi$ als gleichzeitige Integration von φ erzeugt werden:

$$\sin\varphi = -\int\dot{\varphi}\cos\varphi\,dt$$

$$\cos\varphi = \int \dot{\varphi} \sin\varphi \, dt$$

Nunmehr werden zusätzlich zu den beiden Integratoren auch zwei Multiplizierer benötigt:



Bemerkenswerterweise wird hier φ selbst nicht mehr benötigt.

Zwar sind mit $\sin\varphi$ die Auslenkung in x-Richtung und mit $\cos\varphi$ die in y-Richtung verfügbar; auf dem Oszilloskop oder Plotter sind aber nur mehr oder weniger lange Kreisbögen zu sehen.

Es könnte aber Sinn machen, φ oder $\sin\varphi$ als Funktion der Zeit darzustellen.

---

[1]Eine Tschebyscheff-Approximation mit $0.997x - 0.156x^3$ hätte nur den halben Fehler; dies ist aber wegen der alternativen Lösung über die Integration nicht weiter relevant.
[2]Optimierungen durch invertierende Multiplizierer nicht berücksichtigt